MATH

Haute école spécialisée bernoise
Haute école des sciences agronomiques, forestières et alimentaires

MATH

FITNESSTEST DE MATHÉMATIQUES

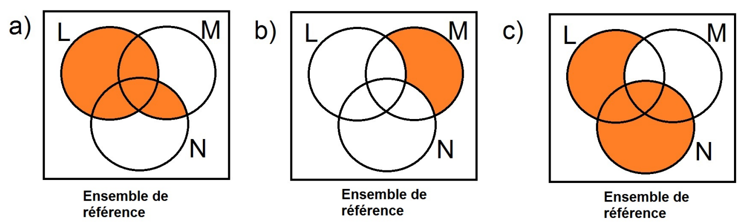
DR. ROGER ROBYR

Résolvez les exercices du test sans employer de résumés théoriques ni calculatrice programmable ou graphique.

Exercice 1.

(1) *On considère les ensembles* $A = \{2, 4, 6\}$ *et* $B = \{x | x \cdot (x+2) \cdot (x-4) \cdot (2x-12) = 0\}$.
  a): *Déterminez* $A \cup B$, $A \cap B$
  b): *Écrivez tous les sous-ensembles de* A.

(2) *Écrivez, à l'aide des opérations sur les ensembles* ($\cap, \cup, \ldots$) *les ensembles représentés dans les diagrammes de Venn:*



(3) *Dessinez le diagramme de Venn pour cette situation [Remarque:* $\overline{L} = \{x | x \notin L\}$*]*

$$M \cap (N \cup \overline{L})$$

(4) *On considère les ensembles* $I = [-\sqrt{2}, 13.5[$, $J = \{-1; 1.5; 2.3\}$ *et* $K =]0, 23]$.
  a): $I \cup J$, $I \cup K$ *et* $J \cup K$.
  b): $I \cap J$, $I \cap K$ *et* $J \cap K$.
  c): $\overline{I} \cap K$, $\overline{J} \cap \overline{K}$

Exercice 2. *Calculez s.v.p.:*

a) $(1+\sqrt{5})^3 \cdot (1-\sqrt{5})^3$ *b)* $\dfrac{4^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{8}}{2^{-2.5} \cdot (\sqrt[5]{2})^2}$ *c)* $\ln \dfrac{1}{e^4} + e^{\ln 1}$

d) $\sin(-30°) + \cos^2(150°) + \tan(225°)$ *e)* $|-3 \cdot 2 + 1| - 4^2 - (-5)^2$ *f)* $\sqrt[4]{15^2 - 12^2} + \log(0.01 + 0.09)$

g) $\dfrac{13!}{2! \cdot 11!} - 0!$ *h)* $\dfrac{135!}{134!} - \dfrac{134!}{133!} + \dfrac{133!}{132!}$ *i)* $(3! - 2)! - (2! + 1)!$

E-mail: roger.robyr@bfh.ch.

Exercice 3. *Simplifiez autant que possible les expressions suivantes:*

$a)\ \dfrac{1}{(2y-3)\cdot(y-1)} - \dfrac{6}{4y^2-9} + \dfrac{5}{4y^2+2y-6}$

$b)\ \dfrac{[(a+\sqrt{b})\cdot(a-\sqrt{b})]^2-(a^2+b)^2}{\frac{(-3ab)^2}{-b}+5a^2}$

$c)\ \dfrac{\sqrt{1-a^2}+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1-a^4}}}$

$d)\ \sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{ab^5}}{a^{-2}b}}$

$e)\ \dfrac{\ln a^{\ln a} - e^{\ln a + \ln a}}{a+\ln a}$

$f)\ \left[\log(ab)^2 - \log\dfrac{b^{-2}}{a^2}\right] - \log b$

$g)\ \dfrac{\sin(-x)+\cos(-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos(x+\pi)+\cos(x+2\pi)+\cos(x+3\pi)}$

$g)\ \dfrac{\sqrt{1-\sin\alpha}\cdot\sqrt{1+\sin\alpha}}{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$, *pour* $\dfrac{-\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 4. *On considère les fonctions:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = ax+3,\ a \in \mathbb{R};$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = px^2+qx-1, p,q \in \mathbb{R}.$$

(1) *Déterminez* $p,q \in \mathbb{R}$ *tel quel*
$$g(1) = 3 \quad et \quad g(-2) = -3.$$
(2) *On pose maintenant* $p=-1$ *et* $q=4$. *Déterminez le paramètre* $a \in \mathbb{R}$, *ainsi d'avoir une seule solution à l'équation*
$$f(x) = g(x).$$
(3) *Déssinez les graphiques de* $f(x)$ *et* $g(x)$ *pour* $a=-1$ *et* $p=1, q=0$. *Calculez les points d'intersection des deux courbes.*

Exercice 5. *Déterminez les solutions des équations et inéquations suivantes [écrivez s.v.p. l'ensemble des solutions]:*

$a)\ \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{\frac{1}{7}-\frac{1}{3x+2}+5} = \dfrac{4}{21}$

$b)\ 2x^4 - 28 = x^2$

$c)\ \dfrac{1}{4-x} - \dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{4}$

$d)\ \sqrt{x-2} - \sqrt{3x} = 1$

$e)\ 9^{-x} = 3^{x-7}$

$f)\ 3\cdot 5^{x+1} = 7^x \cdot 60$

$g)\ 3-5x \geq \dfrac{2}{1-\pi}$

$h)\ \dfrac{2x+1}{x-2} < 1$

Trouvez les solutions des équations suivantes en $\mathbb{N}$

$i)\ n! = n$

$l)\ (n-1)! = (n+1)! - n!\cdot n$

Exercice 6. *On considère les fonctions suivantes:*

$$f : D_f \to W_f, x \mapsto f(x) = \frac{2x+1}{1-x} \qquad , g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = e^x - \frac{1}{2}.$$

Déterminez:

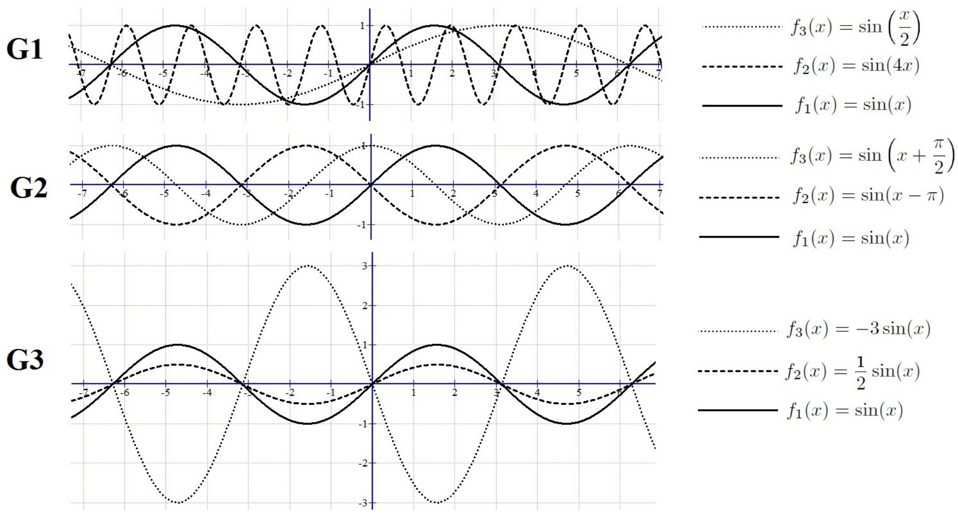
$a) D_f$ | $b) f^{-1}(x)$ | $c) W_f$

$d) f(-3)$ | $e) f(\sqrt{3}-1)$ | $f) f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$g) f(x+1)+f(-x)$ | $h) (g\circ g)(-1)$ | $i) (g\circ f)(0)-(f\circ g)(0)$

$l) (f\circ g)(x)$ | $m) (f\circ f^{-1})(x)$ | $n) x$ *tel quel* $f(x)=2$

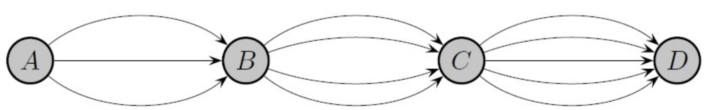
Exercice 7. *Tout d'abord analysez les graphiques G1, G2 et G3*



et décrivez quelles rélations y a-t-il entre $f_1(x), f_2(x)$ et $f_3(x)$. En particulier cherchez de comprendre:

(1) *Quelle est la rélation entre le graphique de* $\sin(x)$ *et les graphiques des fonctions* $\sin(a \cdot x)$. *Qu'est-ce qu'on note si on compare ces courbes? Décrivez les cas $a < 0, 0 < a < 1$ et $a > 1$.*
(2) *Quelle est la rélation entre le graphique de* $\sin(x)$ *et les graphiques des fonctions* $\sin(x + b)$. *Qu'est-ce qu'on note si on compare ces courbes? Décrivez les cas $b < 0$ et $b > 0$.*
(3) *Quelle est la rélation entre le graphique de* $\sin(x)$ *et les graphiques des fonctions* $c \cdot \sin(x)$. *Qu'est-ce qu'on note si on compare ces courbes? Décrivez les cas $c < 0, 0 < c < 1$ et $c > 1$.*

Exercice 8. *Combien y a-t-il de routes entre A et D?*



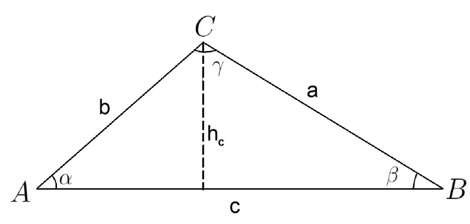
Exercice 9.

(1) *On a à disposition 4 boules de couleurs différentes : rouge, noir, bleu et vert. On veut ranger les 4 boules sur une ligne. Combien y a-t-il de possibles rangements ?*
(2) *Combien peut-on faire d'anagrammes des mots*

(1) MATH et (2) PARFUM ?

Exercice 10. *Calculez les valeurs demandées:*

(1) *On connaît $a = 7.1\,cm, b = 5.3\,cm$ et $h_c = 3.5\,cm$. Déterminez c.*
(2) *On connaît $b = 5.8\,cm, \alpha = 35°$. Déterminez h_c.*
(3) *On connaît $a = 4.7\,cm, c = 2.3\,cm, \beta = 27°$. Déterminez b.*
(4) *On connaît $a = 2.3\,cm, b = 1.6\,cm, \alpha = 35°$. Déterminez β.*



Exercice 11. *Quand on dépose de l'argent en banque, la banque va nous payer en échange des intérêts. Si on dépose un capital initial de $K(0)$ et si la banque va nous proposer un taux d'intérêt i pro année, après une année la banque va nous payer*

$$Z = K(0) \cdot i.$$

Donc le capital après une année est:

$$K(1) = K(0) + Z = K(0) + K(0) \cdot i = K(0) \cdot (1 + i).$$

Intérêts simples: *Les placements d'une durée inférieure à un an ont généralement des intérêts simples. Le montant de l'intérêt est directement proportionel au capital, au taux de placement et à la durée du placement. Ici le temps t est mesuré en jours:*

- *Montant de l'intérêt:* $Z(t) = K(0) \cdot \frac{t}{360} \cdot i$
- *Capital après t-jours:* $K(t) = K(0) + Z(t) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot i\right)$

Intérêts composés: *Si on laisse le capital initial et le montant de l'intérêt en banque, pendant la deuxième année la banque va nous payer les intérêts sur le nouveau capital $K(1)$:*

- *Donc après 2 années:* $K(2) = K(1) \cdot (1 + i) = K(0) \cdot (1 + i)^2$
- *Après n années:* $K(n) = K(n - 1) \cdot (1 + i) = K(0) \cdot (1 + i)^n$

4 Questions:

- ***Capital final:***
  <u>*Intérêts composés:*</u> $K(0) = 1000\,CHF, i = 2.5\%, n = 6$ *années.* $K(n) =?.$
  <u>*Intérêts simples:*</u> $K(0) = 1000\,CHF, i = 2.5\%, t = 170$ *jours. Calculez* $K(t)$.
- ***Capital initial:***
  <u>*Intérêts composés:*</u> $K(11) = 5550\,CHF, i = 2.5\%, n = 11$ *années.* $K(0) =?$
  <u>*Intérêts simples:*</u> $K(195) = 5550\,CHF, i = 2.5\%, t = 195$ *jours. Calculez* $K(0)$.
- ***Taux d'intérêt:***
  <u>*Intérêts composés:*</u> $K(0) = 2500\,CHF, K(7) = 9500\,CHF, n = 7$ *années.* $i =?.$
  <u>*Intérêts simples:*</u> $K(0) = 2500\,CHF, K(321) = 3000\,CHF, t = 321$ *jours. Calculez* i.
- ***Durée:***
  <u>*Intérêts composés:*</u> $K(0) = 950\,CHF, K(n) = 4120CHF, i = 3\%$. $n =?$
  <u>*Intérêts simples:*</u> $K(0) = 950\,CHF, K(t) = 4120\,CHF, i = 3\%$. *Déterminez* t.