Berner Fachhochschule
Hochschule für Agrar-, Forst- und Lebensmittelwissenschaften

MATH MATH

MATHEMATISCHER FITNESSTEST

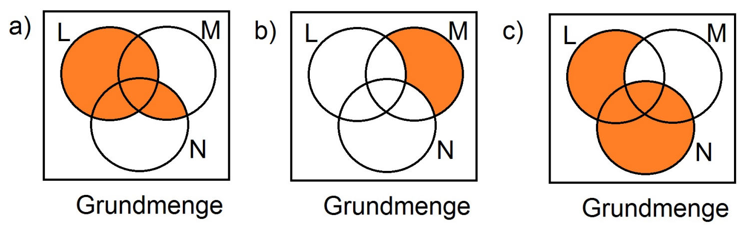
DR. ROGER ROBYR

Die Aufgaben sollten alle ohne Unterlagen und ohne programmierbare oder graphikfähige Rechner gelöst werden können.

Aufgabe 1.

(1) *Gegeben sind die Mengen* $A = \{2,4,6\}$ *und* $B = \{x | x \cdot (x+2) \cdot (x-4) \cdot (2x-12) = 0\}$.
  a): *Bestimmen Sie* $A \cup B$, $A \cap B$
  b): *Schreiben Sie alle Teilmengen von* A *auf.*

(2) *Welche Menge stellt die schraffierte Fläche dar?*



(3) *Schraffieren Sie die Menge*

$$M \cap (N \cup \overline{L})$$

in einem Mengendiagramm. $[\overline{L} = \{x | x \notin L\}]$

(4) *Gegeben sind die Mengen* $I = [-\sqrt{2}, 13.5[$, $J = \{-1; 1.5; 2.3\}$ *und* $K =]0, 23]$.
  a): $I \cup J$, $I \cup K$ *und* $J \cup K$.
  b): $I \cap J$, $I \cap K$ *und* $J \cap K$.
  c): $\overline{I} \cap K$, $\overline{J} \cap \overline{K}$

Aufgabe 2. *Berechnen Sie:*

a) $(1+\sqrt{5})^3 \cdot (1-\sqrt{5})^3$

b) $\dfrac{4^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{8}}{2^{-2.5} \cdot (\sqrt[5]{2})^2}$

c) $\ln \dfrac{1}{e^4} + e^{\ln 1}$

d) $\sin(-30°) + \cos^2(150°) + \tan(225°)$

e) $|-3 \cdot 2 + 1| - 4^2 - (-5)^2$

f) $\sqrt[4]{15^2 - 12^2} + \log(0.01 + 0.09)$

g) $\dfrac{13!}{2! \cdot 11!} - 0!$

h) $\dfrac{135!}{134!} - \dfrac{134!}{133!} + \dfrac{133!}{132!}$

i) $(3! - 2)! - (2! + 1)!$

E-mail: roger.robyr@bfh.ch.

Aufgabe 3. *Vereinfachen Sie so weit wie möglich:*

a) $\dfrac{1}{(2y-3)\cdot(y-1)} - \dfrac{6}{4y^2-9} + \dfrac{5}{4y^2+2y-6}$

b) $\dfrac{[(a+\sqrt{b})\cdot(a-\sqrt{b})]^2 - (a^2+b)^2}{\frac{(-3ab)^2}{-b} + 5a^2}$

c) $\dfrac{\sqrt{1-a^2} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1-a^4}}}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{ab^5}}{a^{-2}b}}$

e) $\dfrac{\ln a^{\ln a} - e^{\ln a + \ln a}}{a + \ln a}$

f) $\left[\log(ab)^2 - \log\dfrac{b^{-2}}{a^2}\right] - \log b$

g) $\dfrac{\sin(-x) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos(x+\pi) + \cos(x+2\pi) + \cos(x+3\pi)}$

g) $\dfrac{\sqrt{1-\sin\alpha}\cdot\sqrt{1+\sin\alpha}}{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$, *für* $\dfrac{-\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Aufgabe 4. *Wir betrachten die Funktionen:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = ax + 3,\ a \in \mathbb{R};$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = px^2 + qx - 1, p, q \in \mathbb{R}.$$

(1) *Bestimmen Sie* $p, q \in \mathbb{R}$ *so dass*
$$g(1) = 3 \quad \textit{und} \quad g(-2) = -3.$$
(2) *Für* $p = -1$ *und* $q = 4$ *bestimmen Sie* $a \in \mathbb{R}$, *so dass die Gleichung*
$$f(x) = g(x)$$
genau eine Lösung besitzt.
(3) *Zeichnen Sie* $f(x)$ *und* $g(x)$ *für* $a = -1$ *und* $p = 1, q = 0$. *Bestimmen Sie alle Schnittpunkte.*

Aufgabe 5. *Lösen Sie folgende Gleichungen und Ungleichungen [schreiben Sie die Lösungsmenge hin]:*

a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{3x+2} + 5} = \dfrac{4}{21}$

b) $2x^4 - 28 = x^2$

c) $\dfrac{1}{4-x} - \dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{4}$

d) $\sqrt{x-2} - \sqrt{3x} = 1$

e) $9^{-x} = 3^{x-7}$

f) $3 \cdot 5^{x+1} = 7^x \cdot 60$

g) $3 - 5x \geq \dfrac{2}{1-\pi}$

h) $\dfrac{2x+1}{x-2} < 1$

Lösen Sie in $\mathbb{N}$

i) $n! = n$

l) $(n-1)! = (n+1)! - n! \cdot n$

Aufgabe 6. *Gegeben sind die zwei Funktionen:*

$$f : D_f \to W_f, x \mapsto f(x) = \frac{2x+1}{1-x} \qquad , g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = e^x - \frac{1}{2}.$$

Bestimmen Sie:

a) D_f

b) $f^{-1}(x)$

c) W_f

d) $f(-3)$

e) $f(\sqrt{3}-1)$

f) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

g) $f(x+1) + f(-x)$

h) $(g \circ g)(-1)$

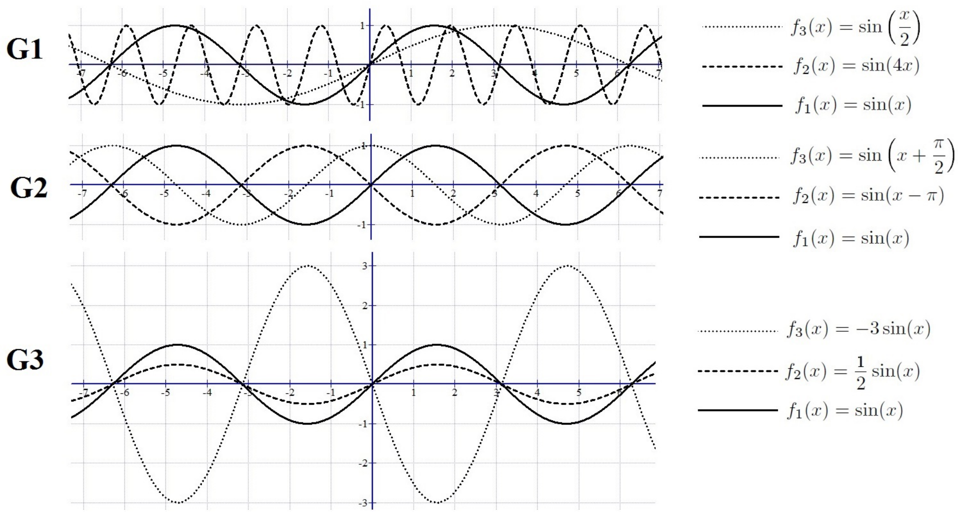
i) $(g \circ f)(0) - (f \circ g)(0)$

l) $(f \circ g)(x)$

m) $(f \circ f^{-1})(x)$

n) x *so dass* $f(x) = 2$

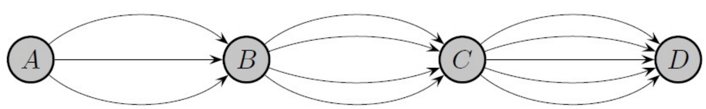
Aufgabe 7. *Analysieren Sie zuerst den Graphen G1, G2 und G3*



und beschreiben Sie danach, die Relationen zwischen $f_1(x), f_2(x)$ und $f_3(x)$. Insbesondere:

(1) *Wie ändert sich der Graphe von* $\sin(x)$, *wenn wir diesen mit dem Graphen der Funktion* $\sin(a \cdot x)$ *vergleichen? Beschreiben Sie die Fälle $a < 0, 0 < a < 1$ und $a > 1$.*
(2) *Wie ändert sich der Graphe von* $\sin(x)$, *wenn wir diesen mit dem Graphen der Funktion* $\sin(x+b)$ *vergleichen? Beschreiben Sie die Fälle $b < 0$ und $b > 0$.*
(3) *Wie ändert sich der Graphe von* $\sin(x)$, *wenn wir diesen mit dem Graphen der Funktion* $c \cdot \sin(x)$ *vergleichen? Beschreiben Sie die Fälle $c < 0, 0 < c < 1$ und $c > 1$.*

Aufgabe 8. *Wie viele Wege führen von A nach D?*



Aufgabe 9.

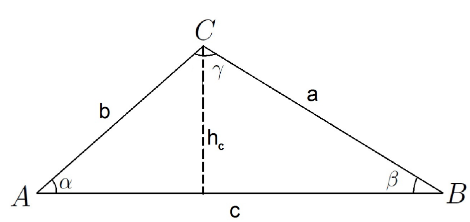
(1) *Gegeben sind 4 verschiedenfarbige (Rot, Schwarz, Blau und Weiss) Kugeln. Diese 4 Kugeln sollen auf alle möglichen Arten auf einer Linie angeordnet werden. Wie viele Möglichkeit gibt es die vier Kugeln anzuordnen?*
(2) *Wie viele Anagramme (Buchstabenpermutationen) von*

(1) MATH und (2) PARFUM.

gibt es?

Aufgabe 10. *Berechnen Sie die gefragten Grössen:*

(1) *Gegeben seien $a = 7.1\,cm, b = 5.3\,cm$ und $h_c = 3.5\,cm$. Bestimmen Sie c.*
(2) *Gegeben seien $b = 5.8\,cm, \alpha = 35°$. Bestimmen Sie h_c.*
(3) *Gegeben seien $a = 4.7\,cm, c = 2.3\,cm, \beta = 27°$. Bestimmen Sie b.*
(4) *Gegeben seien $a = 2.3\,cm, b = 1.6\,cm, \alpha = 35°$. Bestimmen Sie β.*



Aufgabe 11. *Wenn Geld auf einer Bank angelegt wird, zahlt die Bank als Gegenleistung in der Regel einen Zins. Wird ein Kredit in Anspruch genommen, so muss man dafür meistens Zinsen bezahlen. Wird ein Kapital $K(0)$ angelegt und ein Zinssatz i pro Jahr vereinbart so ist der Zins fur ein Jahr:*

$$Z = K(0) \cdot i.$$

Kapital nach einem Jahr:

$$K(1) = K(0) + Z = K(0) + K(0) \cdot i = K(0) \cdot (1 + i).$$

Einfache Verzinsung: *Für andere Laufzeiten zahlen Banken unterjahrig etwa den proportionalen Anteil aus. Sei hier t die Zeit in Tagen.*

- *Einfacher Zins:* $Z(t) = K(0) \cdot \frac{t}{360} \cdot i$
- *Kapital nach t-Tagen:* $K(t) = K(0) + Z(t) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot i\right)$

Zinseszins: *Lasst man das Geld + Zins nach einem Jahr liegen, so erhält man auf dem neuen Kapital $K(1)$ Zinsen:*

- *Nach 2 Jahren:* $K(2) = K(1) \cdot (1 + i) = K(0) \cdot (1 + i)^2$
- *Somit nach n Jahren:* $K(n) = K(n - 1) \cdot (1 + i) = K(0) \cdot (1 + i)^n$

4 Fragestellungen:

- ***Endkapital:*** <u>*Zinseszins:*</u> $K(0) = 1000\,CHF, i = 2.5\%, n = 6$ *Jahren.* $K(n) =?.$
  <u>*Für einf. Verz.:*</u> $K(0) = 1000\,CHF, i = 2.5\%, t = 170$ *Tagen. Berechnen Sie* $K(t)$.
- ***Anfangskapital:*** <u>*Zinseszins:*</u> $K(11) = 5550\,CHF, i = 2.5\%, n = 11$ *Jahren.* $K(0) =?$
  <u>*Für einf. Verz.:*</u> $K(195) = 5550\,CHF, i = 2.5\%, t = 195$ *Tagen. Berechnen Sie* $K(0)$.
- ***Zinssatz:*** <u>*Zinseszins:*</u> $K(0) = 2500\,CHF, K(7) = 9500\,CHF, n = 7$ *Jahren.* $i =?.$
  <u>*Für einf. Verz.:*</u> $K(0) = 2500\,CHF, K(321) = 3000\,CHF, t = 321$ *Tagen. Berechnen Sie* i.
- ***Dauer:*** <u>*Zinseszins:*</u> $K(0) = 950\,CHF, K(n) = 4120CHF, i = 3\%$. $n =?$
  <u>*Für einf. Verz.:*</u> $K(0) = 950\,CHF, K(t) = 4120\,CHF, i = 3\%$. *Bestimmen Sie* t.